Ⅰ型（80分）

数学1,A 2問題とその解答

1　必須問題（配点 60点）

（1）方程式 $x^2-6x+1=0$ の解のうち大きい方をαとする。以下の値をそれぞれ求めよ。

（i）α　　（ii）$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$

（2）x は実数とする。命題「 $x<2$ ならば $x^2<4$ 」の真偽を述べよ。また真であれば証明　偽であればその反例を示せ

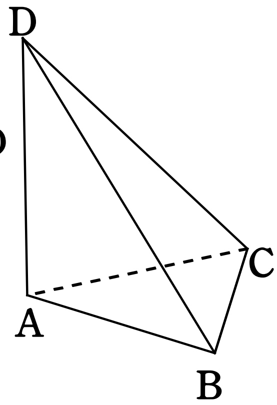
（3） a，b，c を実数とし　 xy 平面上の放物線 $y=ax^2+bx+c$ をGとする。Gは3点 $(0,\ 5)$, $(2,\ 5)$, $(-1,\ 11)$を 通る。

（i） a，b，c の値を求めよ。

（ii）Gの頂点の座標を求めよ。

（iii） t を正の定数とする。 $0\leqq x\leqq t$ における最大値と最小値の差が8となるような t の値を求めよ。

（4）$AB=AC=3$, $BC=2$, $AD=4$, $AD\perp$(三角形ABC)である四面体ABCDがある。



（i）辺BCの中点をMとするとき　線分AMの長さを求めよ。

（ii）三角形ABCの面積を求めよ。また　四面体ABCDの体積を求めよ。

（iii）Aから三角形BCDに下した垂線と三角形BCDの交点Hとする。線分AHの長さを求めよ。また $\cos\angle DAH$ の値を求めよ。

略解

（１）$\alpha = 3+2\sqrt{2}$, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = (3+2\sqrt{2}) + \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = (3+2\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2}) = 6$

（２）偽　反例　$x=-3$

（３）連立方程式　$c=5$，$4a+2b+c=5$，$a-b+c=11$

解くと　$a=2$，$b=-4$，$c=5$

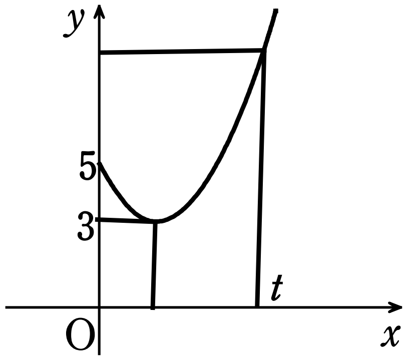
$y=2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3$　頂点 $(1,\ 3)$

$0 \leqq x \leqq t$ より　放物線が $(0,\ 5)$を通り

頂点 $(1,\ 3)$ であることから　t は $t>1$

従って　$(2t^2-4t+5)-3=8$

$2t^2-4t-6=0$　よって　$t=3$



（４）$\mathrm{AM}=2\sqrt{2}$

△ABCの面積S$=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

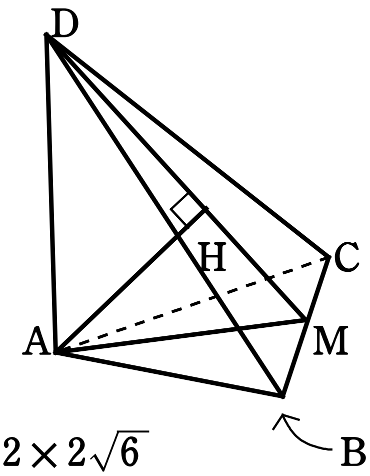
AH$=h$ とおく。四面体の体積に着目

$\dfrac{1}{3}S\times 4=\dfrac{1}{3}(\triangle DBC\text{の面積})\times h$

ここで　$\triangle DBC$の面積 $=\dfrac{1}{2}\times BC\times DM=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{6}$

よって　$2\sqrt{2}\times 4=2\sqrt{6}\,h$　より　$AH=h=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

また　$\cos\angle DAH=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$\boxed{2}$　指定選択問題（配点40点）

AB=4，BC=$4\sqrt{13}$，$CA=12$ である三角形ABCがある。辺ABの中点をM　∠BACの二等分線と辺BCの交点をDとし　三角形AMDの外接円をKとする。

（１）∠BACの大きさを求めよ。

（２）三角形ABCの面積を求めよ。また　ADの長さを求めよ。

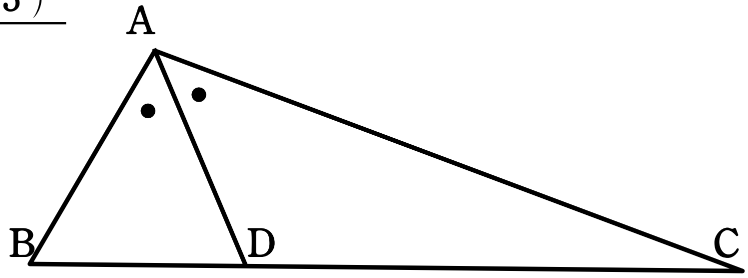
（３）Kの半径を求めよ。

（４）Kと辺ACの交点のうちAと異なる点をEとする。線分AEの長さを求めよ。

解答

（１）余弦定理

$$\cos\angle BAC=\frac{4^2+12^2-(4\sqrt{13})^2}{2\times4\times12}$$
$$=\frac{4^2(1+3^2-13)}{2\times4\times12}$$
$$=\frac{-3}{2\times3}=-\frac{1}{2}$$



ゆえに　$\angle BAC = 120°$　　　AB＝4, BC＝$4\sqrt{13}$, CA＝12

（２）三角形ABCの面積

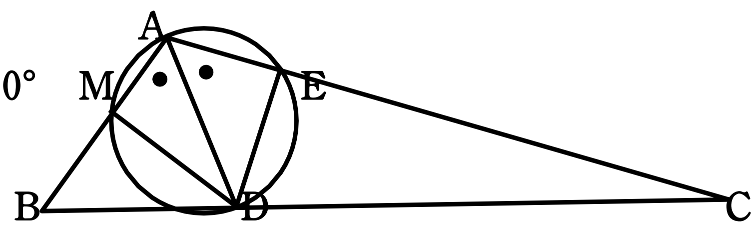
$$=\frac{1}{2}\times4\times12\sin120° = \frac{1}{2}\times4\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

次に　三角形の面積の和に着目

△ABCの面積＝△ABDの面積＋△ACDの面積　従って

$$12\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times4AD\sin60° + \frac{1}{2}\times12AD\sin60°$$
$$=4\sqrt{3}\,\mathrm{AD}$$　よって　AD＝3

（３）$MD^2=AM^2+AD^2$
$$-2AM\cdot AD\cos60°$$
$$=4+9-6$$
$$=7$$



MD＝$\sqrt{7}$　また　MD＝ED＝$\sqrt{7}$

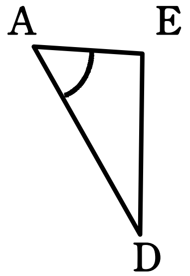
次に　三角形AMDにおいて

正弦定理　$\dfrac{\sqrt{7}}{\sin60°}=2R$　ただし　Rは円Kの半径

よって　R＝$\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

三角形ADEにおいて

余弦定理　$DE^2=AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cos 60°$



代入　$7=9+AE^2-2\cdot 3\cdot AE\cdot\frac{1}{2}$より

$AE^2-3AE+2=0$　$(AE-1)(AE-2)=0$

AE＝2　または　AE＝1　どっち…？

AE＝2とおく　余弦定理　$\cos\angle AED=\frac{4+7-9}{2\times 2\times\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}>0$

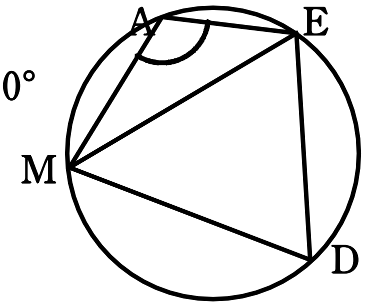
∠AEDは 90° に近い鋭角

AE＝１とおく　余弦定理　$\cos\angle AED=\frac{1+7-9}{2\times 1\times\sqrt{7}}=-\frac{1}{2\sqrt{7}}<0$

∠AEDは 90° に近い鈍角　どっちかな？

発見！

三角形AMEにおいて　余弦定理



まず $ME^2=MD^2+ED^2-2MD\cdot ED\cos 60°$

代入　$ME^2=7+7-14\times\frac{1}{2}$

$ME=\sqrt{7}$

余弦定理

$ME^2=AM^2+AE^2-2AM\cdot AE\cos 120°$　代入　$7=4+AE^2+2AE$

$AE^2+2AE-3=0$

$(AE-1)(AE+3)=0$　よって　AE＝1

Ⅱ型（100分）

数学Ⅰ, A, Ⅱ　4問題とその解答

$\boxed{1}$　必須問題（配点50点）

（１）等式 $xy=2y+3$ を満たす整数 x, y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

（２）x は実数とする。命題「$x<2$ ならば $x^2<4$」の真偽を述べよ。また真であれば証明　偽であればその反例を示せ

（３） $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$ の展開式における定数項を求めよ。

（４） 12^{12} の桁数を求めよ。ただし $\log_{10}2=0.301$　 $\log_{10}3=0.477$

（５）曲線 $y=x^3$ をＣとし　Ｃ上の点Ａ(1，1)におけるＣの接線を l とする。

（ｉ） l の方程式を求めよ。また　Ｃと l の共有点のうちＡと異なる点の座標

（ii）Ｃと l で囲まれる部分の面積を求めよ。

略解

（１） $xy=2y+3$　変形　$(x-2)y=3$　等式を満たすすべての整数の組

$x-2$	1	3	-1	-3
y	3	1	-3	-1

$(x,\ y)=(3,\ 3)\ (5,\ 1)\ (1,\ -3)\ (-1,\ -1)$

（２）　Ｉ型　$\boxed{1}$　（２）参照

（３）一般項　${}_{12}C_r(2x^2)^r(x^{-1})^{12-r}={}_{12}C_r2^rx^{2r-12+r}$　定数項 $3r-12=0$ より

$r=4$　よって　定数項　${}_{12}C_42^4=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times16=7920$

（４）N= 12^{12} とおく。両辺の常用対数をとって　$\log_{10}N=12\log_{10}12$

$=12(2\log_{10}2+\log_{10}3)=12(2\times0.301+0.477)=12.948$　よって

$12<\log_{10}N<13$ より　$10^{12}<N<10^{13}$　ゆえに　Nは 13桁の整数

（５）接線 l の方程式　$y-1=3(x-1)$ より $y=3x-2$

l と曲線Cとの交点　$x^3=3x-2$ より $(x-1)^2(x+2)=0$

Ａでない交点の座標 $(-2,\ -8)$

また　Cと l で囲まれた部分の面積

$\displaystyle\int_{-2}^{1}\{x^3-(3x-2)\}dx=\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{1}(x-1)^2\{(x-1)+3\}d\,x$

$\displaystyle=\int_{-2}^{1}\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx=\left[\frac{(x-1)^4}{4}+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$